Tentamen

Elektriciteit en Magnetisme 1

Donderdag 20 juni 2013

18:30-21:30

Leg je studentenkaart aan de rechterkant van de tafel.

Schrijf op *elk* vel uw naam en studentnummer.
***Schrijf leesbaar*.**

Maak elke opgave op een *apart* vel.

Dit tentamen bestaat uit 4 vragen. Alle vier vragen hebben een gelijk gewicht.

OPGAVE 1

Punten: a+b+c+d+e+f+g =1+3+2+3+3+2+4=18

Gegeven een *geleidende* holle bolschil met het centrum in de oorsprong en met binnenstraal $r = a$ en buitenstraal $r = b$ (zie figuur links). Op de bolschil wordt een lading $+Q$ aangebracht.

a) Geef in een schets aan hoe deze lading over de holle bolschil is verdeeld. Leg uit hoe je aan je antwoord komt.
b) Bereken het elektrische veld $\vec{E}$ (grootte en richting) voor $0 < r < \infty$.

We plaatsen nu een massieve *geleidende* bol met straal $R_0 < a$ in het centrum van de holle bolschil (zie figuur midden). Op de massieve bol wordt een lading $-Q$ aangebracht.

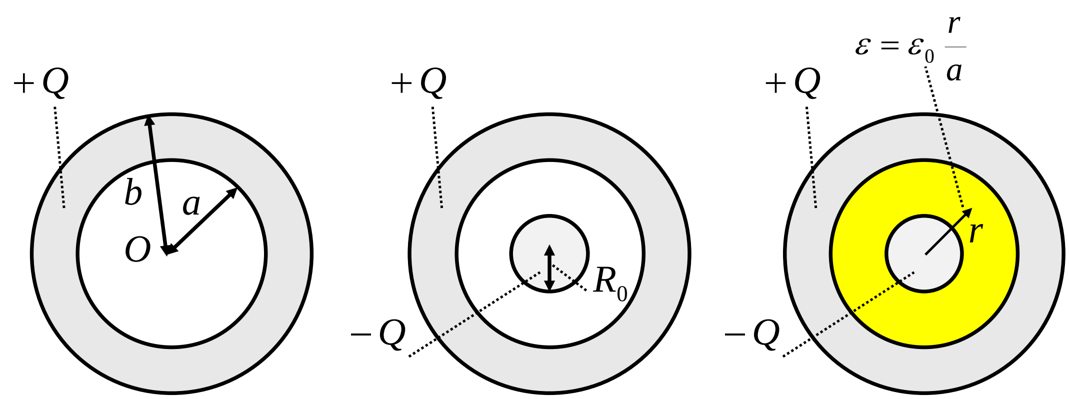
c) Geef in een schets aan hoe nu de negatieve en positieve lading over respectievelijk de massieve bol en de holle bolschil zijn verdeeld. Leg je antwoord uit.
d) Bereken in deze situatie het elektrische veld $\vec{E}$ (grootte en richting) voor $0 < r < \infty$.
e) Toon aan dat het potentiaalverschil $\Delta V = V_+ - V_-$ tussen de holle bolschil en de massieve bol gegeven wordt door:

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{a}\right)$$

f) Bereken de capaciteit C_0 van dit systeem van twee geleiders.

In de ruimte ($R_0 < r < a$) tussen de massieve bol en de holle bolschil wordt een lineair diëlektrisch materiaal geplaatst waarvoor geldt: $\varepsilon(r) = \varepsilon_0 \frac{r}{a}$, waarbij r de afstand tot oorsprong is (zie figuur rechts).

g) Bereken de verhouding C/C_0 waarbij C de capaciteit van het systeem van de twee geleiders met diëlektrisch materiaal is.

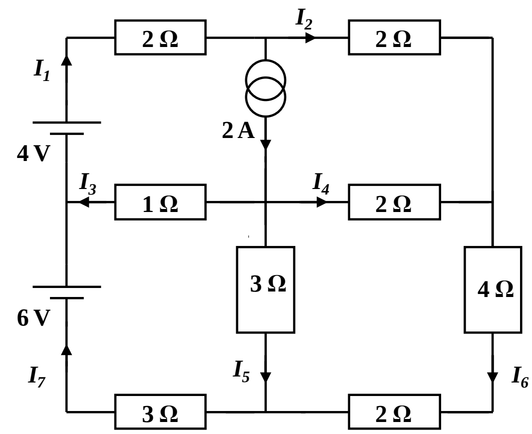


OPGAVE 2

Punten: a+b+c+d+e=4+3+4+4+3=18

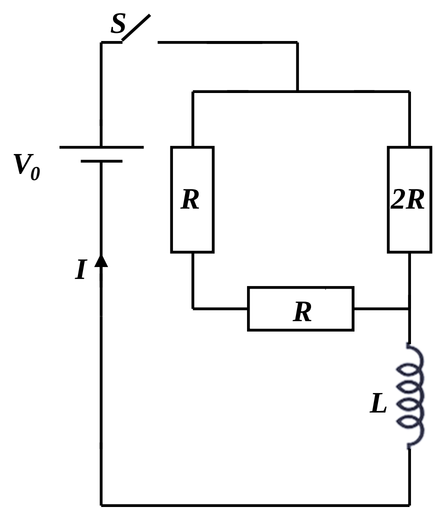
Gegeven is de hiernaast getekende schakeling.

a) Geef 7 onafhankelijke vergelijkingen voor I_1, $\ldots I_7$. De vergelijkingen hoeven niet te worden opgelost.



Een gelijkspanningsbron is aangesloten op drie weerstanden en een spoel (zie de hiernaast getekende schakeling).

Aanvankelijk is de schakelaar S geopend. Op $t = 0$ wordt de schakelaar gesloten.



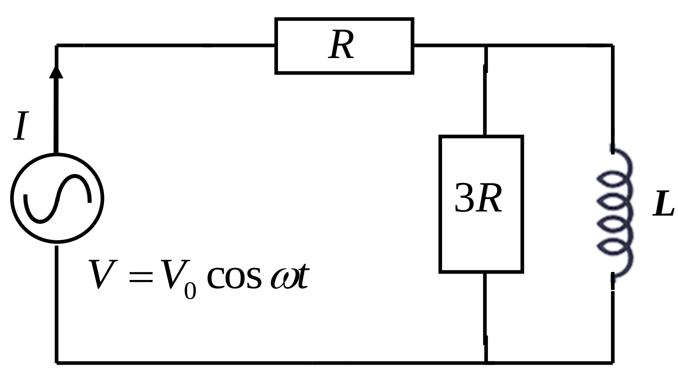
b) Geef de begin- ($t = 0$) en eindwaarde ($t = \infty$) van de stroom I. Geef een uitleg van je antwoord.

c) Bereken I voor $t \geq 0$. Druk je antwoord uit in R, L en V_0.

Gegeven is de hieronder getekende schakeling voor een stationaire wisselspanningsbron die in de reële schrijfwijze beschreven wordt door $V = V_0 \cos(\omega t)$.

d) Geef de stroom I in de complexe schrijfwijze.

e) Geef de stroom I in de reële schrijfwijze.



OPGAVE 3

Punten: a+b+c+d+e =2+4+4+4+4=18

a) Geef de wet van Ampère voor het magnetische veld in integrale vorm.
b) Leid hieruit de wet van Ampère in differentiële vorm af.

Over een lange holle cilinder met straal a loopt een oppervlaktestroom $\vec{K}_1 = K_1\hat{\varphi}$ (zie figuur links). De symmetrieas van de cilinder ligt langs de z-as. In deze opgave mag je randeffecten verwaarlozen.

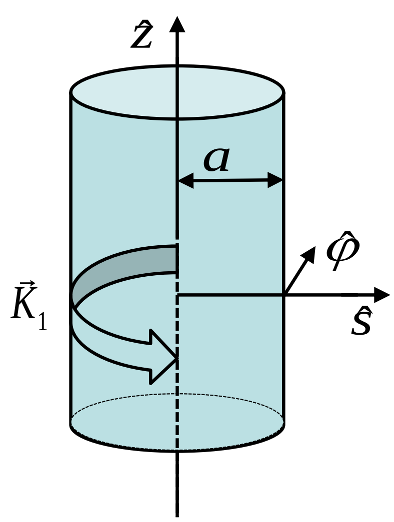
c) Laat zien dat in deze situatie er geen magnetische veld $\vec{B}$ *buiten* de cilinder is. Bepaal tevens de grootte en richting van het magnetische veld $\vec{B}$ *binnen* de cilinder.

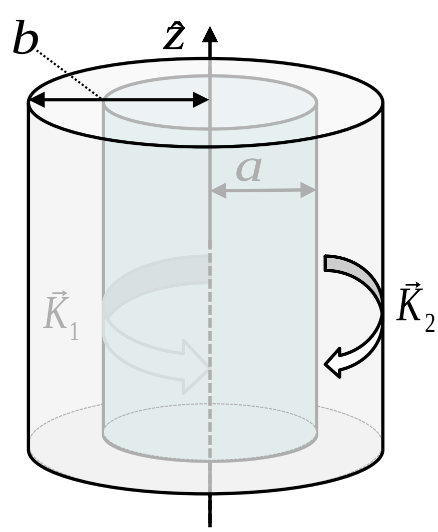
Er wordt een tweede holle cilinder (met straal $b > a$) om de eerste holle cilinder geplaatst. De symmetrieassen van beide cilinders vallen samen. Over de tweede holle cilinder loopt een oppervlaktestroom $\vec{K}_2 = -K_2\hat{\varphi}$ (zie figuur rechts).

d) Bepaal in deze situatie de grootte en richting van het magnetische veld $\vec{B}$ binnen de binnenste cilinder, tussen beide cilinders en buiten de buitenste cilinder.

De ruimte tussen beide cilinders wordt nu geheel gevuld met een lineair diamagnetisch medium met magnetische susceptibiliteit χ_m.

e) Bereken de grootte en richting van het (hulp)veld $\vec{H}$ en het magnetische veld $\vec{B}$ tussen de beide cilinders. Neemt de grootte van het magnetische veld tussen de cilinders toe of af tengevolge van de aanwezigheid van het diamagnetische materiaal?



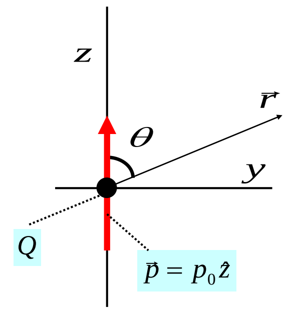


OPGAVE 4

Punten: a+b+c+d =4+5+5+4=18

De scalaire potentiaal $V(\vec{r})$ van een zekere ladingsverdeling (een elektrische monopool Q en dipool $\vec{p} = p_0\hat{z}$, zie figuur) in de oorsprong kan worden beschreven door:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r} + \frac{p_0\hat{z}\cdot\hat{r}}{r^2}\right]$$



a) Bewijs dat het elektrische veld $\vec{E}(\vec{r})$ tengevolge van deze ladingsverdeling in het punt gegeven $\vec{r}$ wordt door:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q\hat{r}}{r^2} + \frac{p_0\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)}{r^3}\right)$$

b) De kracht tengevolge van deze ladingsverdeling op een lading q die zich in het punt $(0, a, a)$ bevindt en zich met snelheid v_0 in de richting $\hat{v} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$ beweegt wordt beschreven door $\vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}$. Bereken F_x, F_y en F_z. Veronderstel hierbij dat $p_0 = Q\alpha a$.

Stel nu dat er behalve de ladingsverdeling er zich ook een stroomverdeling (een magnetische dipool $\vec{m} = m_0\hat{z}$) in de oorsprong bevindt die de volgende vectorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r})$ veroorzaakt:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{m_0\hat{z}\times\hat{r}}{r^2}\right]$$

c) Bewijs dat het magnetische veld $\vec{B}(\vec{r})$ tengevolge van deze stroomverdeling in het punt $\vec{r}$ gegeven wordt door:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{m_0\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)}{r^3}\right)$$

d) De kracht tengevolge van de *combinatie* van de ladingsverdeling en de stroomverdeling op een lading q die zich in het punt $(0, a, a)$ bevindt en zich met snelheid $\vec{v} = v_0\hat{v}$ in de richting $\hat{v} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$ beweegt wordt weer beschreven door $\vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}$. Bereken nu F_x, F_y en F_z. Veronderstel hierbij dat $m_0 = Qv_0a$ en gebruik $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$.

Uitwerkingen
Opgave 1

Onderdeel a)

Positieve lading is homogeen verdeeld over het buitenoppervlak ($r = b$) van de holle bolschil. Uit de wet van Gauss volgt dat de flux door een bolschil met straal ($a < r < b$) gelijk aan nul moet zijn (veld in een geleider is nul). Dus er is geen omsloten lading, dus alle lading zit op het buitenoppervlak.

Onderdeel b)

Er is bolsymmetrie en de velden zijn in de $\hat{r}$-richting dus gebruiken we de wet van Gauss met een bolvormig Gauss oppervlak met straal r.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 4\pi r^2 E = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Voor $r < b$ geldt $Q_{enc} = 0$ en dus $\vec{E} = 0$
Voor $r > b$ geldt $Q_{enc} = +Q$ en dus $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

Onderdeel c)

Negatieve lading is homogeen verdeeld over het buitenoppervlak ($r = R_0$) van de massieve geleider. Positieve lading is homogeen verdeeld over binnenoppervlak ($r = a$) van de holle bolschil.

Onderdeel d)

Velden vinden we weer met de wet van Gauss.

$r < R_0$: $\vec{E} = 0$ (veld in geleider is 0)

$R_0 < r < a$: $\vec{E} = \dfrac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

$r > a$: $\vec{E} = 0$ (geen omsloten lading)

Onderdeel e)
Merk op dat omdat het geleiders zijn de potentiaal overal in de geleiders gelijk is en je dus inderdaad kunt spreken van een uniek potentiaalverschil.

$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{R_0}^{a} \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{a}\right)$$

Onderdeel f)

$$C_0 = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_0 a}{a - R_0}$$

Onderdeel g)

Omdat we een lineair diëlektricum hebben bepalen we eerst het $\vec{D}$-veld via de wet van Gauss.

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = 4\pi r^2 D = Q_{enc}^{free}$$

In het gebied $R_0 < r < a$ geldt dat $Q_{enc}^{free} = -Q$ en dus:

$$R_0 < r < a: \vec{D} = \frac{-Q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

En met $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$ vinden we

$$R_0 < r < a: \vec{E} = \frac{-Qa}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{r}$$

Het potentiaal verschil tussen de geleiders wordt:

$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{R_0}^{a} \frac{-Qa}{4\pi\varepsilon_0 r^3} dr = \frac{aQ}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{a^2}\right)$$

En

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{8\pi\varepsilon_0 a R_0^2}{a^2 - R_0^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_0 a}{a - R_0}\frac{2R_0}{a + R_0} = C_0 \frac{2}{1 + \frac{a}{R_0}}$$

Opgave 2:

Onderdeel a)
Er zijn 5 knooppunten.
Vergelijkingen van de knooppunten.

K1: $I_1 - I_2 - 2 = 0$
K2: $-I_1 + I_3 + I_7 = 0$
K3: $-I_3 + 2 - I_4 - I_5 = 0$
K4: $I_4 + I_2 - I_6 = 0$
K5: $I_6 + I_5 - I_7 = 0$

K5=-(K1+K2+K3+K4)

We kunnen de laatste vergelijking dus weglaten.

De maasvergelijkingen.
Belangrijk hier is dat de stroombron weggelaten kan worden voor het opstellen van de maasvergelijkingen. Er blijven dan drie mazen over en die geven (met de klok mee):

M1: $4 - 2I_1 - 2I_2 + 2I_4 - I_3 = 0$
M2: $6 + I_3 - 3I_5 - 3I_7 = 0$
M3: $3I_5 - 2I_4 - 4I_6 - 2I_6 = 0 \Rightarrow 3I_5 - 2I_4 - 6I_6 = 0$

De zeven onafhankelijke vergelijkingen zijn: K1, K2, K3, K4, M1, M2, M3.

Onderdeel b)

In het begin gaat er geen stroom door de spoel vanwege de grote tegenspanning die de spoel opwekt na het inschakelen, dus $I(0) = 0$; na oneindig lange tijd is de stroom constant en vormt de spoel geen weerstand meer, $I(\infty) = \frac{V}{R_v}$ waarbij $R_v = R$ de vervangingsweerstand is van de parallelle weerstanden, immers.

$$\frac{1}{R_v} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} = \frac{1}{R}$$

Onderdeel c)

We gebruiken meteen de vervangingsweerstand. Dan is er alleen 1 maasvergelijking:

$$V_0 - R_v I - L\frac{dI}{dt} = V_0 - RI - L\frac{dI}{dt} = 0$$

Dus $I(t) = A + Be^{-\frac{R}{L}t}$

Uit $I(0) = 0$ volgt $A = -B$
Uit $I(\infty) = \frac{V_0}{R}$ volgt $A = \frac{V_0}{R}$

En dus

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Onderdeel d)
Definieer stromen I (door de spanningsbron naar boven), I_1 (door de weerstand $3R$ naar beneden) en I_2 (door de spoel naar beneden).

Kirchhoff 1 (er is 1 onafhankelijke knoop-vergelijking),

$I = I_1 + I_2$

Kirchhoff 2 (er zijn 2 mazen, met de klok mee),

$V_0 - RI - 3RI_1 = 0$

$3RI_1 - Z_L I_2 = 0$

Uit de tweede maasvergelijking volgt:

$I_2 = \frac{3RI_1}{Z_L}$

En dit invullen samen met de knoopvergelijking in de eerste maasvergelijking geeft,

$V_0 - R\left(I_1 + \frac{3RI_1}{Z_L}\right) - 3RI_1 = 0 \Rightarrow V_0 - 4RI_1 - \frac{3R^2}{Z_L}I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{V_0}{4R\left(1 + \frac{3R}{4Z_L}\right)}$

en dus

$$I = \left(1 + \frac{3R}{Z_L}\right)I_1 = \left(1 + \frac{3R}{Z_L}\right)\frac{V_0}{4R\left(1 + \frac{3R}{4Z_L}\right)}$$

en met $Z_L = i\omega L$ wordt dit in de complexe schrijfwijze,

$$I = \left(1 + \frac{3R}{i\omega L}\right) \frac{V_0}{4R\left(1 + \frac{3R}{4i\omega L}\right)} = V_0 \frac{1 - i\frac{3R}{\omega L}}{4R\left(1 - i\frac{3R}{4\omega L}\right)}$$

Kan ook geschreven worden als:

$$I = \frac{V_0}{R} \frac{3R + i\omega L}{3R + 4i\omega L}$$

Onderdeel e)

Voor de reële schrijfwijze vinden we,

$$|I| = \left| V_0 \frac{1 - i\frac{3R}{\omega L}}{4R\left(1 - i\frac{3R}{4\omega L}\right)} \right| = \frac{V_0}{4R} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{3R}{\omega L}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{3R}{4\omega L}\right)^2}} = \frac{V_0}{R} \frac{\sqrt{9R^2 + \omega^2 L^2}}{\sqrt{9R^2 + 16\omega^2 L^2}}$$

en

$$\arg(I) = \arg(V_0) + \arg\left(1 - i\frac{3R}{\omega L}\right) - \arg(4R) - \arg\left(1 - i\frac{3R}{4\omega L}\right) \Longrightarrow$$

$$\arg(I) = \tan^{-1}\left(-\frac{3R}{\omega L}\right) - \tan^{-1}\left(-\frac{3R}{4\omega L}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3R}{4\omega L}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{3R}{\omega L}\right)$$

En dus de reële schrijfwijze wordt

$$I = \frac{V_0}{4R} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{3R}{\omega L}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{3R}{4\omega L}\right)^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

Met

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{3R}{4\omega L}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{3R}{\omega L}\right)$$

Of omdat $\tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\frac{1}{x})$ ook

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{3R}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{4\omega L}{3R}\right)$$

Opgave 3

Onderdeel a)

Wet van Ampère in integrale vorm

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

Onderdeel b)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{a} = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

En dus

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Onderdeel c)

In deze geometrie zijn er vanwege symmetrie er alleen velden in de z-richting. En met de rechterhandregel volgt dat binnen de cilinder het veld in de positieve z-richting wijst en buiten de cilinder in de negatieve z-richting. Beschouw een Ampèrelus buiten de holle cilinder waarvan de zijden die in de z-richting wijzen en dus parallel met het magnetische veld zijn op afstand s_1 en s_2 van de z-as liggen. Deze lus omvat geen stroom, dus volgens de wet van Ampère geldt dan:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(s_1)L - B(s_2)L = \mu_0 I_{enc} = 0 \Rightarrow B(s_1) = B(s_2)$$

Stel dat we $s_2 = \infty$ kiezen dan geldt $B(s_2) = 0$; maar dan ook $B(s_1) = 0$ en s_1 is een willekeurig punt buiten de cilinder dus:

$B(s) = 0$ voor $s > a$

Het veld binnen de cilinder bepalen we met een Ampère lus die half binnen en half buiten de cilinder ligt, dan geldt,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = -B(s_1)L - B(s_2)L = -B(s_1)L = \mu_0 I_{enc} = -\mu_0 K_1 L \Rightarrow B(s_1) = \mu_0 K_1$$

Dus

$B(s) = \mu_0 K_1 \hat{z}$ voor $s < a$

Merk op dat het minteken in het rechterdeel van de wet van Ampère komt omdat de richting van de stroom en de richting van de Ampèrelus tegengesteld zijn.

Onderdeel d)

Met superpositie:

$B(s) = \mu_0(K_1 - K_2)\hat{z}$ voor $s < a$
$B(s) = -\mu_0 K_2 \hat{z}$ voor $a < s < b$
$B(s) = 0$ voor $s > b$

Onderdeel e)

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = HL = K_2 L \Rightarrow H = K_2$$

Dus $\vec{H} = -K_2 \hat{z}$

En $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = -\mu_0(1 + \chi_m)K_2\hat{z}$

Voor een diamagnetisch materiaal geldt $\chi_m < 0$ en daarom niet de grootte van het magnetische veld af.

Opgave 4

Onderdeel a)

Schrijf eerst

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r} + \frac{p_0\cos\theta}{r^2}\right]$$

En gebruik dan $\vec{E} = -\nabla\vec{V}$ in bolcoördinaten

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r^2} + \frac{2p\cos\theta}{r^3}\right]\hat{r}$$
$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{p\sin\theta}{r^3}\right]\hat{\theta}$$
$$E_\varphi = -\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0$$

Daaruit volgt:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r\hat{r} + E_\theta\hat{\theta} + E_\varphi\hat{\varphi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q\hat{r}}{r^2} + \frac{p_0\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)}{r^3}\right)$$

Onderdeel b)

Er geldt $\vec{F} = q\vec{E}$

In het punt $(0, a, a)$ geldt $\theta = \frac{\pi}{4}$ en $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dat betekent dat $\cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = 1$ en,

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\hat{y} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\hat{z}$$
$$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\hat{y} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\hat{z}$$
$$r = \sqrt{2a^2}$$

Dit allemaal invullen levert

$$\vec{F} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q(\hat{y}+\hat{z})}{\left(\sqrt{2a^2}\right)^2} + \frac{p_0\left(\sqrt{2}(\hat{y}+\hat{z}) + \frac{1}{2}\sqrt{2}(\hat{y}-\hat{z})\right)}{\left(\sqrt{2a^2}\right)^3}\right)$$

En met $p = Q\alpha a$ wordt dit:

$$\vec{F} = \frac{\sqrt{2}}{4a^2}\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left(1+\frac{3}{2}\alpha\right)\hat{y} + \left(1+\frac{1}{2}\alpha\right)\hat{z}\right)$$

Onderdeel c)

Schrijf eerst

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{m_0\hat{z}\times\hat{r}}{r^2}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{m_0\sin\theta\,\hat{\varphi}}{r^2}\right]$$

En dan (met de uitdrukking voor de rotatie in bolcoördinaten en het feit dat A_r en A_θ nul zijn)

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{m_0\sin^2\theta}{r^2}\right]\right)\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{m_0\sin\theta}{r}\right]\right)\hat{\theta} \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{m_0\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)}{r^3}\right)$$

Onderdeel d)

Totale kracht is

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$

Het eerste gedeelte hebben we onder onderdeel b uitgerekend. Voor het tweede gedeelte gebruiken we weer alle eigenschappen die in het punt $(0, a, a)$ gelden

Dan vinden we

$$\hat{v}\times\hat{r} = (\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})\times\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\hat{y} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\hat{z}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\hat{y} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\hat{z}$$

$$\hat{v}\times\hat{\theta} = (\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})\times\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\hat{y} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\hat{z}\right) = -\sqrt{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\hat{y} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\hat{z}$$

$$q\vec{v}\times\vec{B} = \frac{qv_0\mu_0 m_0}{4\pi}\left(\frac{\left(-\frac{1}{2}\hat{y} + \frac{1}{2}\hat{z} - \hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y} + \frac{1}{2}\hat{z}\right)}{\left(\sqrt{2a^2}\right)^3}\right) = \frac{qv_0\mu_0 m_0}{4\pi}\left(\frac{(\hat{z}-\hat{x})}{\left(\sqrt{2a^2}\right)^3}\right)$$

En met $m_0 = Qv_0a$ en $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$ wordt dit

$$q\vec{v} \times \vec{B} = \frac{qv_0Qv_0a}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left(\frac{(\hat{z} - \hat{x})}{\left(\sqrt{2a^2}\right)^3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4a^2}\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{v_0}{c}\right)^2 (\hat{z} - \hat{x})$$

Zodat tenslotte (met gebruik van b)

$$\vec{F} = \frac{\sqrt{2}}{4a^2}\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\beta^2\hat{x} + \left(1 + \frac{3}{2}\alpha\right)\hat{y} + \left(1 + \frac{1}{2}\alpha + \beta^2\right)\hat{z}\right)$$

Waarbij $\beta = \frac{v_0}{c}$.